

Travaux dirigés d'électricité3 (série N°1)

I-Pour étudier le moment dipolaire \vec{p} et le vecteur polarisation \vec{P} , on considère un milieu diélectrique composé de particules polarisées. Ces particules sont supposées identiques. Chacune porte deux charges (+q) et (-q). Les barycentres de ces deux charges sont distants de a. Si O et M sont le centre de a et un point quelconque de l'environnement respectivement, on donne $(\vec{a}, \vec{OM}) = \theta$.

1) Calculer le potentiel V_d créé par chaque particule supposée isolée, en un point M très loin de son barycentre ? Sachant que V_d est proportionnel à $(r^{-2} p \cdot \cos \theta)$, identifier le module p de moment dipolaire \vec{p} ?

2) Calculer le module E_d du champ électrique créé par chaque particule au point M ?

3) Si N est le nombre moyen de particules par unité de volume, établir \vec{P} le vecteur polarisation ou le moment dipolaire moyen par unité de volume, le potentiel moyen $U(M)$ et le module de champ électrique moyen $IE(M)$ créé par ces N particules ?

II-On veut étudier l'interaction existante entre une substance polarisée et un champ extérieur \vec{E}_e . Pour cela, on considère une molécule de cette substance. Son moment dipolaire \vec{p} est placée de telle sorte que son barycentre est confondu avec le point O origine d'un repère d'observation. Les coordonnées de ses charges (-q) et (+q) dans ce repère sont respectivement $(-x_b, -y_b, -z_b)$ et (x_b, y_b, z_b) . Cette molécule est en effet, soumise à l'action de champ \vec{E}_e .

1) Trouver la force \vec{F} exercée par ce champ sur cette molécule en fonction de \vec{p} et \vec{E}_e ?

- 2)** Etablir l'énergie d'interaction E_{in} de cette molécule avec ce champ extérieur? En déduire la condition d'avoir E_{in} nulle.
- 3)** Si N est le nombre moyen des molécules par unité de volume, établir le module IF de la force moyenne et l'énergie moyenne IE_{in} correspondantes ?
- 4)** Exprimer le moment résultant \vec{M} en O des forces agissantes sur la molécule indiquée, en fonction de \vec{p} ? On suppose que le champ \vec{E}_e est uniforme.

III. On considère deux milieux diélectriques M_1 et M_2 . Ils sont polarisés et séparés par une surface S . Leurs polarisations sont respectivement \vec{P}_1 et \vec{P}_2 . Les densités σ_L et σ_P sont respectivement celle des charges libres et celle des charges de polarisation.

- a)** Exprimer en fonction de σ_L et σ_P , les relations de passage d'un milieu diélectrique à l'autre des champs \vec{E} et \vec{D} ? En déduire l'expression de la densité σ_P des charges de polarisation sur la surface S ?
- b)** Retrouver autrement cette expression de la densité σ_P ?

**Sites.google.com/site/saborpcmath/
cours en ligne
par whatsapp: 0638148874**

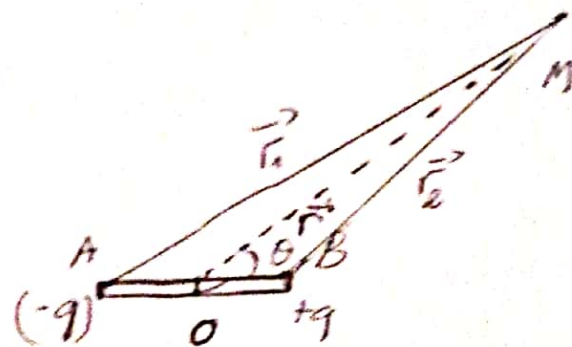
CORRECTION DE LA SERIE. (1)

(I) Une particule dans le milieu
choix est un dipôle $\{-q, q\}$

1° $V_d(M) = V_M(-q, q)$

$$= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

avec



$$r_1^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 - ar \cos \theta \rightarrow r_1^2 = r^2 \left(\frac{a^2}{4r^2} + 1 - \frac{a \cos \theta}{r} \right)$$

$$r_2^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 + ar \cos \theta \rightarrow r_2^2 = r^2 \left(\frac{a^2}{4r^2} + 1 + \frac{a \cos \theta}{r} \right) \text{ et}$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{a^2}{4r^2} - \frac{a \cos \theta}{r} \right) \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{a^2}{4r^2} + \frac{a \cos \theta}{r} \right) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Mais $(1 + \epsilon)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{a \cos \theta}{r^2}$

$$\Rightarrow \langle V_d(M) = V_d(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cos \theta}{r^2} \rangle \text{ avec } \langle qa = p \rangle$$

2° $\vec{E}_d = -\text{grad} V_d$ en coordonnées polaires $\vec{E}_d = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta$

avec $E_r = -\frac{\partial V_d}{\partial r} = \frac{2qa \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V_d}{\partial \theta} = \frac{qa \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

$\Rightarrow \left\langle E_d = \frac{p \sqrt{1+3 \cos^2 \theta}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right\rangle$

3° si N = nombre de particule par unite de volume $\Rightarrow \langle \vec{P} = N \vec{p} \rangle$ est
le Moment de dipôle moyen. Le potentiel moyen sera alors

$$U(r, \theta) = U(M) = \frac{P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \Rightarrow |E_d|_{\text{moyen}} = \frac{P \sqrt{1+3 \cos^2 \theta}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

avec $P = Np$

2/2

$$\textcircled{\text{II}} \quad \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_A + \vec{F}_B \quad \text{avec} \quad \vec{r} = q\vec{a} = q\vec{AB} \quad \odot \quad \vec{E}_e \quad \odot$$

$$= -q\vec{E}_e(A) + q\vec{E}_e(B) = q(\vec{E}_e(B) - \vec{E}_e(A)) \quad \odot \quad A \quad a \quad B$$

-q 0 +q

A, B et O sont très voisins

$\vec{E}_e(A)$ et $\vec{E}_e(B)$ sont de même direction \odot

On peut donc translater leurs points d'application au point O \odot

$$E_x(A) = E_x(O) + \frac{\partial E_x}{\partial x}(x_A - 0) + \frac{\partial E_x}{\partial y}(y_A - 0) + \frac{\partial E_x}{\partial z}(z_A - 0) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial E_y}{\partial x} \dots$$

$$= E_x(O) + \frac{\partial E_x}{\partial x} x_A + \frac{\partial E_y}{\partial x} y_A + \frac{\partial E_z}{\partial x} z_A = E_x(O) + \frac{\partial}{\partial x} (\vec{E}_e \cdot \vec{OA})$$

De même, on fait pour les autres composantes. Et on :

$$\vec{E}_e(A) = \vec{E}_e(O) + \text{grad}(\vec{E}_e \cdot \vec{OA}) \quad \text{et} \quad \vec{E}_e(B) = \vec{E}_e(O) + \text{grad}(\vec{E}_e \cdot \vec{OB})$$

$$\Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = q \cdot \text{grad}[\vec{E}_e(\vec{OB} - \vec{OA})] \rightsquigarrow \langle \vec{F}(O) = \text{grad}(\vec{r} \cdot \vec{E}_e) \rangle$$

2°) Le dipôle \vec{p} tend à s'opposer à \vec{E}_e . Il lui résiste en effectuant un travail résistant: $dW = -\text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{E}_e) dM$ et

$$dW = \text{grad}W dM = \text{grad}E_m dM \rightsquigarrow \langle E_m = -\vec{p} \cdot \vec{E}_e \rangle$$

$$\text{Si} \langle \vec{E}_e = \vec{0} \rangle \rightsquigarrow E_m = 0$$

$$3^\circ) N \text{ molécules par unité de volume} \rightsquigarrow \langle \vec{P} = N\vec{p} \rangle$$

La force moyenne dans ce cas est $\langle \vec{F} = \text{grad}(N\vec{p} \cdot \vec{E}_e) \rangle$

$$\text{L'énergie moyenne d'interaction est} \langle E_m = -N\vec{p} \cdot \vec{E}_e \rangle$$

4°) \vec{E}_e est uniforme, alors on a: $\vec{E}_A = \vec{E}_B$

$$\vec{M}_O(\vec{F}_A \text{ et } \vec{F}_B) = \vec{OA} \wedge \vec{F}_A + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B = q(-\vec{OA} \wedge \vec{E} + \vec{OB} \wedge \vec{E})$$

$$\Rightarrow \langle \vec{M}_O(\vec{F}_A \text{ et } \vec{F}_B) = q\vec{AB} \wedge \vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E} \rangle$$

$$\textcircled{\text{III}} \quad a) \quad E_{2T} - E_{1T} = 0, \quad E_{2N} - E_{1N} = \frac{\sigma_L + \sigma_L}{\epsilon_0}$$

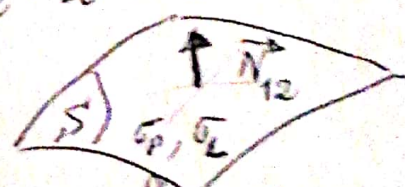
$$D_{2N} - D_{1N} = \sigma_L \quad \text{avec} \quad D_{1N} = \epsilon_0 E_{1N} + P_{1N}$$

$$\Rightarrow \sigma_p + \sigma_L + P_{2N} - P_{1N} = \sigma_L \rightsquigarrow \langle \sigma_p = \frac{P_{1N} - P_{2N}}{\epsilon_0} \rangle$$

$$b) \quad \sigma_{p1} = \vec{P}_1 \cdot \vec{N}_{12} \quad \text{et} \quad \sigma_{p2} = -\vec{P}_2 \cdot \vec{N}_{12}$$

$$\sigma_p = \sigma_{p1} + \sigma_{p2} \rightsquigarrow \sigma_p = P_{1N} - P_{2N}$$

milieu M_2
 $\vec{P}_2, \vec{E}_2, \vec{D}_2$



milieu M_1
 $\vec{P}_1, \vec{E}_1, \vec{D}_1$

SUITE DE COURS D'ELECTRICITE.3

Par Mr. A. HATRAOUI

⑤ Densité des courants d'aimantation:

Dans tout milieu magnétique existent deux types de courants de densités respectives \vec{J}_s et \vec{J}_v . Elles sont dites:

- densité superficielle de courant d'aimantation: \vec{J}_s , et
- densité volumique de courant d'aimantation: \vec{J}_v .

En effet, on considère le potentiel vecteur \vec{A} dans un milieu magnétique donné:

$$\vec{A}(r) = \dots, \quad d\phi = \vec{J} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\vec{A}(r) = \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\mu_0 \vec{J}}{4\pi r} d\mathcal{V} \quad \text{avec} \quad I = \iint_{(S)} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(r) = \int_{(\mathcal{V})} \frac{\mu_0 I}{4\pi r} d\vec{\ell} \quad \text{si } \vec{u} \text{ est un vecteur unitaire quelconque.}$$

$$\vec{A}(r) \cdot \vec{u} = \int_{(\mathcal{V})} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \cdot \vec{u}}{r} = \iint_{(S)} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{\rho} \otimes \left(\frac{\vec{u}}{r} \right) d\vec{S} \quad \text{application de théorème de Stokes-Ampère}$$

Mais $\vec{\rho} \otimes \left(\frac{\vec{u}}{r} \right) = \frac{1}{r} \vec{\rho} \otimes \vec{u} + \left(\vec{\text{grad}} \frac{1}{r} \right) \wedge \vec{u} = \vec{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) \wedge \vec{u}, \quad u \cdot d\vec{S}$

$$\vec{A}(r) \cdot \vec{u} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_{(S)} \left(\vec{\text{grad}} \frac{1}{r} \wedge \vec{u} \right) \cdot d\vec{S} \quad \text{Application des propriétés de produit mixte}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_S \left(d\vec{S} \wedge \vec{\text{grad}} \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{u} \quad \text{avec} \quad I \iint_S d\vec{S} = \vec{m}$$

on aura:

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \wedge \vec{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) \quad \text{mais } \vec{m} = \iint_S \vec{M} d\mathcal{V}$$

$$\text{Alors: } \vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{M} \wedge \vec{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) d\mathcal{V}; \quad \vec{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\vec{M} \wedge \vec{r}}{r^3} d\mathcal{V}$$

$$\vec{\text{rot}}\left(\frac{\vec{M}}{r}\right) = \frac{1}{r} \vec{\text{rot}} \vec{M} + \text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) \wedge \vec{M}$$

$$\vec{M} \wedge \text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = \vec{\text{rot}} \vec{M} - \vec{\text{rot}}\left(\frac{\vec{M}}{r}\right)$$

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{\text{rot}} \vec{M}}{r} d\tau - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{\text{rot}} \frac{\vec{M}}{r} d\tau, \text{ sont des vecteurs unitaires}$$

$$\text{Alors } \vec{u}_0 \iiint_V \vec{\text{rot}}\left(\frac{\vec{M}}{r}\right) d\tau = \iiint_V \vec{u}_0 \cdot \vec{\text{rot}}\left(\frac{\vec{M}}{r}\right) d\tau = \iiint_V \text{div}\left(\frac{\vec{M}}{r} \wedge \vec{u}_0\right) d\tau$$

$$\left(\iiint_V \vec{\text{rot}}\left(\frac{\vec{M}}{r}\right) d\tau\right) \cdot \vec{u}_0 = \iiint_V \left(\frac{\vec{M} \wedge \vec{u}_0}{r}\right) d\tau = \iiint_V \frac{d\vec{S} \wedge \vec{M} \cdot \vec{u}_0}{r}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{\text{rot}} \vec{M}}{r} d\tau - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{d\vec{S} \wedge \vec{M}}{r}, \text{ avec } d\vec{S} = d\vec{r} \wedge \vec{u}_0$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{\text{rot}} \vec{M}}{r} d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{M} \wedge \vec{u}_0}{r} d\tau$$

$$\text{soient : } \left\langle \vec{\text{rot}} \vec{M} = \vec{j}_{\text{vol}} \right\rangle \text{ et } \left\langle \vec{M} \wedge \vec{u}_0 = \frac{\vec{j}_{\text{vol}}}{\text{div}} \right\rangle$$

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}_{\text{vol}}}{r} d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}_{\text{vol}}}{r} d\tau$$

⑥ Vecteur champ magnétique

D'après le théorème d'Ampère, nous avons

$$\oint_{\text{Courbe}} \vec{B} \cdot d\vec{C} = \iint_{\text{Surface}} \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{total}} = \mu_0 \iint_{\text{Surface}} (\vec{j}_L + \vec{j}_{\text{vol}}) \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_L + \vec{j}_{\text{vol}}) \text{ où } \vec{j}_L \text{ dérive de } \vec{E}$$

courant libre alors que \vec{j}_{vol} celle de courant volumique d'aimantation. avec $\vec{j}_{\text{vol}} = \vec{\text{rot}} \vec{M}$; $\vec{\text{rot}}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right) = \vec{j}_{\text{vol}}$

Il existe un vecteur champ magnétique ou excitation magnétique \vec{H} , tel que : $\left\langle \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \vec{H} \right\rangle$

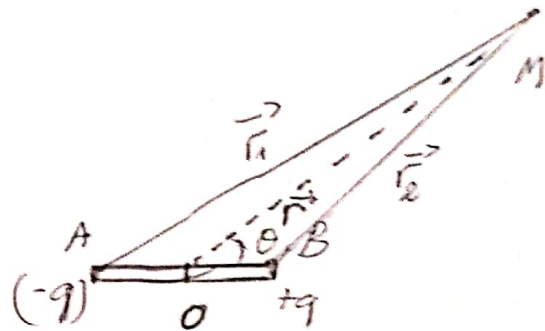
$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad \text{et} \quad \left\langle \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j}_L \right\rangle \text{ Équation d'Ampère généralisée.}$$

CORRECTION DE LA SEANCE (1) TD1

(I) Une particule dans le milieu
choisir est un dipôle $\{-q, q\}$

1°) $V_d(M) = V_M(-q, q)$

$= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2}$ avec



$r_1^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 - ar \cos \theta \rightarrow r_1^2 = r^2 \left(\frac{a^2}{4r^2} + 1 - \frac{a \cos \theta}{r} \right)$

$r_2^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 + ar \cos \theta \rightarrow r_2^2 = r^2 \left(\frac{a^2}{4r^2} + 1 + \frac{a \cos \theta}{r} \right)$ et

$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{a^2}{4r^2} - \frac{a \cos \theta}{r} \right) \right)^{-\frac{1}{2}}$; $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{a^2}{4r^2} + \frac{a \cos \theta}{r} \right) \right)^{-\frac{1}{2}}$

Mais $(1 + \epsilon)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{a \cos \theta}{r^2}$

$\Rightarrow \langle V_d(M) = V_d(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cos \theta}{r^2} \rangle$ avec $\langle qa = p \rangle$

2°) $\vec{E}_d = -\text{grad } V_d$ en coordonnées polaires $\vec{E}_d = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta$

avec $E_r = -\frac{\partial V_d}{\partial r} = \frac{2qa \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V_d}{\partial \theta} = \frac{qa \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \Rightarrow \left\langle \vec{E}_d = \frac{p \sqrt{1+3\cos^2 \theta}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right\rangle$

3°) si N = nombre de particule par unite de volume $\Rightarrow \langle \vec{P} = N \vec{p} \rangle$ est
le Moment de polarisation moyen. Le potentiel moyen sera alors

$U(r, \theta) = U(M) = \frac{P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \Rightarrow \langle E_d \rangle_{\text{moyen}} = \frac{P \sqrt{1+3\cos^2 \theta}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

avec $P = Np$

II) 1) $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_A + \vec{F}_B$ avec $\vec{r} = q\vec{a} = q\vec{AB}$ ω \vec{E}_e ω

$$= -q\vec{E}_e(A) + q\vec{E}_e(B) = q(\vec{E}_e(B) - \vec{E}_e(A)) \omega$$

A, B et O sont trois voisins
 $\vec{E}_e(A)$ et $\vec{E}_e(B)$ sont de même direction ω
 on peut donc translater leurs points d'application au point O

$$\vec{E}_e(O) = \vec{E}_e(O) + \frac{\partial \vec{E}_e}{\partial x_1}(1,0) + \frac{\partial \vec{E}_e}{\partial x_2}(0,1) + \frac{\partial \vec{E}_e}{\partial x_3}(0,0) \text{ avec } \frac{\partial \vec{E}_e}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{q}{r^3} \right) = \frac{\partial \vec{E}_e}{\partial x_1}$$

$$= \vec{E}_e(O) + \frac{\partial \vec{E}_e}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \vec{E}_e}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial \vec{E}_e}{\partial x_3} x_3 = \vec{E}_e(O) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\vec{E}_e \cdot \vec{OA})$$

De même, on fait pour les autres composantes. Soit on :

$$\vec{E}_e(A) = \vec{E}_e(O) + \text{grad}(\vec{E}_e \cdot \vec{OA}) \text{ et } \vec{E}_e(B) = \vec{E}_e(O) + \text{grad}(\vec{E}_e \cdot \vec{OB})$$

$$\Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = q \cdot \text{grad}[\vec{E}_e(\vec{OB} - \vec{OA})] \rightsquigarrow \langle \vec{F}(O) = \text{grad}(\vec{r} \cdot \vec{E}_e) \rangle$$

2°) Le dipôle \vec{p} tend à s'opposer à \vec{E}_e . Il lui résiste en effectuant un travail résultant : $dW = -\text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{E}_e) dM$ et

$$dW = \text{grad}W dM = \text{grad}E_m dM \rightsquigarrow \langle E_m = -\vec{p} \cdot \vec{E}_e \rangle$$

si $\langle \vec{E}_e = \vec{0} \rangle \rightsquigarrow E_m = 0$

3°) N molécules par unité de volume $\rightarrow \langle \vec{P} = N\vec{p} \rangle$
 la force moyenne dans ce cas est $\langle \vec{F} = \text{grad}(\vec{P} \cdot \vec{E}_e) \rangle$
 et l'énergie moyenne d'interaction est $\langle E_m = -N\vec{p} \cdot \vec{E}_e \rangle$

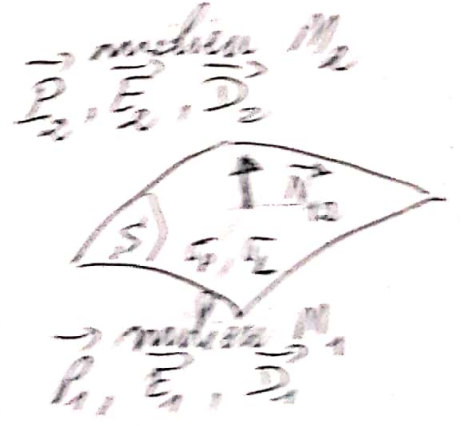
4°) \vec{E}_e est uniforme, alors on a : $\vec{E}_A = \vec{E}_B$
 $\vec{M}_O(\vec{F}_A \text{ et } \vec{F}_B / O) = \vec{OA} \wedge \vec{F}_A + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B = q(-\vec{OA} \wedge \vec{E} + \vec{OB} \wedge \vec{E})$
 $\Rightarrow \langle \vec{M}_O(\vec{F}_A \text{ et } \vec{F}_B) = q\vec{AB} \wedge \vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E} \rangle$

III) a) $E_{2T} - E_{1T} = 0, E_{2N} - E_{1N} = \frac{P_2 + P_1}{E_0}$
 $D_{2N} - D_{1N} = \sigma_L$ avec $D_{iN} = \epsilon_0 E_{iN} + \frac{P_{iN}}{E_0}$

$$\Rightarrow \sigma_p + \sigma_L + \frac{P_{2N}}{E_0} - \frac{P_{1N}}{E_0} = \sigma_L \rightsquigarrow \langle \sigma_p = \frac{P_{1N} - P_{2N}}{E_0} \rangle$$

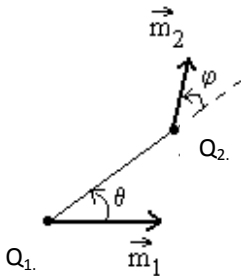
b) $\sigma_{p1} = \vec{P}_1 \cdot \vec{N}_{12}$ et $\sigma_{p2} = \vec{P}_2 \cdot \vec{N}_{12}$

$$\sigma_p = \sigma_{p1} + \sigma_{p2} \rightsquigarrow \sigma_p = \frac{P_{1N} - P_{2N}}{E_0}$$



TRAVAUX DIRIGES D'ELECTRICITE 3 (Série 2 ou TD2)

I. Deux dipôles magnétiques de moments \vec{m}_1 et \vec{m}_2 sont à distance r fixe l'un de l'autre. Ils peuvent s'orienter librement dans le plan. Chaque dipôle \vec{m}_n génère dans son environnement une induction \vec{B}_n .



- a)** Calculer l'énergie potentielle E_p de système proposé en fonction de \vec{B}_1 et \vec{m}_2 ?
- b)** Calculer \vec{B}_1 en fonction de $(r=Q_1Q_2)$ et θ ?
- c)** Retrouver l'énergie potentielle E_p du système proposé en fonction de r , θ et φ ?
- d)** Calculer la force d'attraction entre les deux dipôles occupant les positions d'équilibre stable ($\theta=0$, $\varphi=0$)?

On donne pour tout vecteur \vec{V} le rotationnel en coordonnées cylindriques:

$$\overrightarrow{rot(\vec{V})} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r V_\theta}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

II. Un aimant permanent, en forme de cylindre de révolution de hauteur h et de rayon R est aimanté uniformément et parallèlement à son axe. Il est caractérisé par ses perméabilités magnétiques μ_r et μ .

a) Calculer les courants d'aimantation correspondants ?

b) Calculer l'induction magnétique \vec{B} et l'excitation magnétique \vec{H} , créés en tout point O intérieur ou extérieur sur l'axe du cylindre, en fonction de vecteur aimantation \vec{M} et des

demi-angles α_1 et α_2 des cônes de sommet O s'appuyant sur les bases de ce cylindre $[\alpha_1, \alpha_2 \in (0, \frac{\pi}{2})]$?

c) Etudier les cas limites où: $h \ll R$ (disque) et $h \gg R$ (barreau) pour $\vec{B}(O)$ et $\vec{H}(O)$?

III. Un barreau est composé de deux milieux aimantés en forme de deux cylindres coaxiaux. Ils sont caractérisés par les perméabilités magnétiques μ_1 , μ_{1r} , μ_2 et μ_{2r} ainsi par les champs vectoriels \vec{B}_1 , \vec{B}_2 , \vec{H}_1 , \vec{H}_2 , \vec{M}_1 et \vec{M}_2 . La densité superficielle de courant libre \vec{J}_{SL} au niveau de leur surface de séparation S, est supposée nulle.

a) Etablir dans les conditions ainsi citées, les relations de continuité des vecteurs \vec{B} et \vec{H} sur S ?

b) Etablir \vec{M} en fonction de \vec{B} seul puis en fonction de \vec{H} seul ?

c) Déterminer \vec{J}_{sa} la densité totale des courants superficiels d'aimantation sur S ?

**Sites.google.com/site/saborpcmath/
cours en ligne
par whatsapp: 0638148874**

ELECTRICITE-3 / 2019/2020
CORRECTION DE LA SERIE N°3

I a/ L'énergie potentielle E_p d'un dipôle magnétique \vec{m} soumis à l'action d'un champ extérieur \vec{B}_e est le travail résistant de la force de Laplace \vec{F}_L créée par ce champ et appliquée en tout élément différentiel $d\vec{l}$ de contour correspondant à ce dipôle.



En effet, on a : $dW = -\vec{F}_L \cdot d\vec{z} = -I (\vec{dl} \cdot \vec{B}_e) dz$ avec dz un déplacement différentiel du dipôle \vec{m} .

$\Rightarrow W_r = -I \int (\vec{dl} \cdot \vec{B}_e) dz = -I \vec{S} \cdot \vec{B}_e \Rightarrow E_p = W_r = -\vec{m} \cdot \vec{B}_e$
Le système proposé est composé de deux dipôles \vec{m}_1 et \vec{m}_2 . L'un des deux crée le champ extérieur et l'autre lui sera soumis.
Si on a : $\vec{B}_e = \vec{B}_1$ et $\vec{m} = \vec{m}_2 \Rightarrow E_p = -\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1$

b/ On sait que le potentiel vecteur créé par un dipôle magnétique \vec{m}_1 est :

$$A_1(Q_2) = \frac{\mu_0 \vec{m}_1 \cdot \vec{Q}_1 Q_2}{4\pi \|\vec{Q}_1 Q_2\|^3}$$

Avec $\vec{Q}_1 Q_2 = r \vec{e}_r = \vec{r}$ et \vec{e}_r vecteur unitaire de repère cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

$$\vec{A}_1(Q_2) = \frac{\mu_0 m_1 (\cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta)}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 m_1 \sin\theta}{4\pi r^2} \vec{e}_\theta$$

mais $\text{rot}(\vec{A}_1(Q_2)) = \vec{B}_1(r)$: rotationnel dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

$$\vec{B}_1(r) = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_{1z}}{\partial \theta} - \frac{\partial A_{1\theta}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{1r}}{\partial z} - \frac{\partial A_{1z}}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_{1\theta})}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_{1r}}{\partial \theta} \end{bmatrix} \xrightarrow[A_{1z} \neq 0]{\text{seule}} \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_{1z}}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial A_{1z}}{\partial r} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu_0 m_1 \cos\theta}{4\pi r^3} \\ \frac{2\mu_0 m_1 \sin\theta}{4\pi r^3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{1r} \\ B_{1\theta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

c/ $E_p = E_p(\theta, \varphi) = ?$ on sait que

$$E_p = - \vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1(r) = - (\cos \varphi \vec{e}_r + \sin \varphi \vec{e}_\theta) m_2 (B_{1r} \vec{e}_r + B_{1\theta} \vec{e}_\theta)$$

$$\Rightarrow E_p(\theta, \varphi) = \frac{-\mu_0 m_1 m_2}{4\pi r^3} (\cos \theta \cos \varphi + 2 \sin \theta \sin \varphi)$$

d/ A l'équilibre stable, on a: $\theta = \varphi = 0$

On savait que pour toute fonction scalaire E_p , on a: $dE_p = \text{grad } E_p \cdot d\vec{r} = dW_r$

Avec dW_r : travail résistant différentiel.

$$dW_r = - \vec{F}_L \cdot d\vec{r} \Rightarrow \vec{F}_L = - \text{grad } E_p = - \frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{e}_r$$

$$\vec{F}_L = \vec{F}_{\text{attraction}} = \frac{-3\mu_0 m_1 m_2}{4\pi r^5} \vec{r}$$

II) Etude d'un cylindre de révolution (R, h), uniformément aimanté - suivant son axe:

a/ Courants d'aimantation:

$\vec{j} = \vec{M} \wedge \vec{n}$ avec $\vec{n} = \pm \vec{e}_z$ ou \vec{e}_r

→ sur les bases de cylindre
 $\vec{n} \parallel \vec{e}_z \parallel \vec{M}$; $\vec{j} = \vec{j}_{as_1} = \vec{j}_{as_2} = \vec{0}$

→ sur la surface latérale:
 $\vec{n} = +\vec{e}_r$ et $\vec{M} = M \vec{e}_z \Rightarrow \vec{j}_{as_L} = M \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = M \vec{e}_\theta$

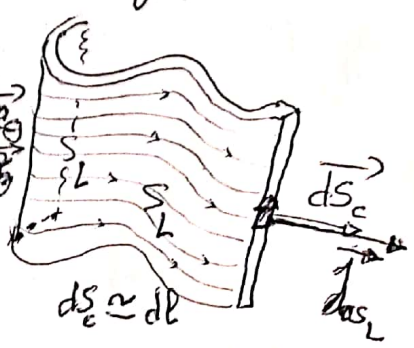
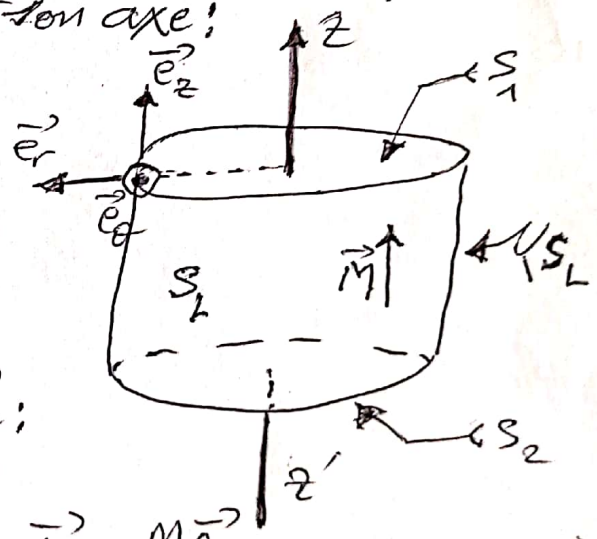
→ Dans le volume de cylindre, on a: $\vec{j} = \text{rot } \vec{M}$
 \vec{M} est uniforme $\Rightarrow \vec{j}_{av} = \vec{0}$

Alors $I_{as_1} = I_{as_2} = 0$ et

$$I_{as_L} = \iint_{S_L} \vec{j}_{as_L} \cdot d\vec{S}_L = \iint_{S_L} M \vec{e}_\theta \cdot d\vec{e}_\theta$$

$$\left\{ \begin{aligned} d\vec{S}_L &= dS_L \vec{e}_\theta \\ &= 1 \cdot dl \vec{e}_\theta \\ &= dl \vec{e}_\theta \end{aligned} \right.$$

$$\langle I_{as_L} \rangle = Mh$$



b/ Calcul de \vec{B} et \vec{H} :

La surface latérale est supposée composée d'une succession de spires d'épaisseur dz . Chaque spire différentielle $d\vec{s}$ est parcourue par un courant dI . Donc

Point
interieur

Chaque élément $d\vec{l}$ de cette spire parcourue par dI , crée en Q_i , un champ différentiel

$d\vec{B}(Q_i)$: (Q_i point interne au cylindre). Selon Biot et Savart on a:

$$* \quad d\vec{B}(Q_i) = \frac{\mu_0 dI d\vec{l} \times \vec{PQ}_i}{4\pi \|\vec{PQ}_i\|^3} \quad \text{avec } d\vec{l} = dl \vec{e}_\theta \text{ et } dI = J_{az} dz = M dz$$

Le point Q_i est supposé centre de repère ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$).

$$D'où \vec{PQ}_i = \vec{PK} + \vec{KQ}_i = -R\vec{e}_r - z\vec{e}_z$$

$$d\vec{B}(Q_i) = \frac{\mu_0 M dz dl \vec{e}_\theta \times \vec{PQ}_i}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 M dl dz (R\vec{e}_z - z\vec{e}_r)}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = d\vec{B}_z + d\vec{B}_r$$

A cause de la symétrie circulaire, On trouve:

$$d\vec{B}_r = \int_{\theta=0}^{2\pi R} d\vec{B}_r \vec{e}_r = \vec{0} \quad d\vec{B}_z = \int_{\theta=0}^{2\pi R} d\vec{B}_z \vec{e}_z = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi R} \frac{R dz \vec{e}_z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

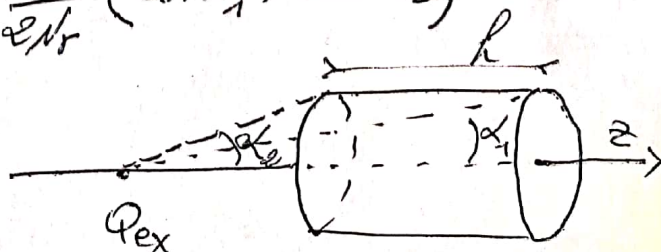
$$dB_z(Q_i) = \frac{\mu_0 M}{4} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dz \quad \text{avec } \sin\varphi = \frac{R}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \text{ et } \cos\varphi = \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$B_z(Q_i) = \frac{\mu_0 M}{2} \int_{\alpha_1}^{\pi - \alpha_2} d(\cos\varphi) \Rightarrow B_z(Q_{in}) = -\frac{\mu_0 M}{2} (\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1)$$

$$\text{et } H_z(Q_{in}) = \frac{B_z(Q_{in})}{\mu_0} = -\frac{M}{2\pi R} (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)$$

Point
exterieur
à gauche

$$* \quad B(Q_{ex}) = B_z(Q_{ex}) = \frac{\mu_0 M}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d(\cos\varphi)$$



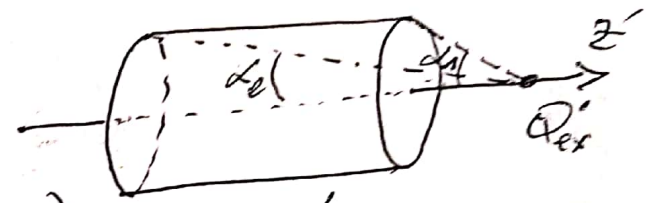
$$B(Q_{ex}) = \frac{\mu_0 M}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \text{ et}$$

$$H(Q_{ex}) = \frac{M}{2\mu_r} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

Point
extérieur
à droite

* Dans ce cas, on a :

$$B(Q_{ex}) = \frac{\mu_0 M}{2} \int_{\pi-\alpha_1}^{\pi-\alpha_2} d(\cos \varphi)$$



$$B(Q_{ex}) = \frac{\mu_0 M}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \text{ et}$$

$$H(Q_{ex}) = \frac{M}{2\mu_r} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

c/

1/ si $h \gg R$, $h \rightarrow \infty \Rightarrow \vec{B}(Q_{in}) = -\mu_0 \vec{M}$ et $\vec{H}(Q_{in}) = -\frac{\vec{M}}{\mu_r}$
Car Q est seulement à l'intérieur.

2/ si $h \ll R$, $h \rightarrow 0 \Rightarrow \vec{B}(Q_{in}) = \vec{0}$ et $\vec{H}(Q_{in}) = \vec{0}$
 Q ne peut être qu'à l'extérieur.

Rq: En (C_1) On a : $Q_{in} \in \text{cylindre}$, $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \pi$

En (C_2) On a : $Q_{ex} \notin \text{cylindre}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$

III a/ Conditions aux limites :

$$B_{1N} - B_{2N} = 0 \text{ et } H_{1T} - H_{2T} = (\vec{j}_{\text{libre}} \wedge \vec{n}_{21}) \cdot \vec{u}_T$$

$$\text{Si } \vec{j}_{\text{libre}} = 0 \leadsto H_{1T} - H_{2T} = 0$$

$$b/ \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \frac{\vec{H}}{\mu_r} \leadsto \vec{M} = \left(\frac{\mu_r}{\mu_0} - 1\right) \vec{H}$$

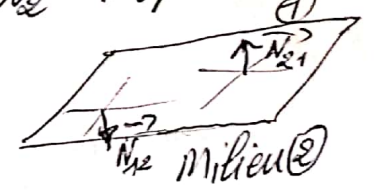
$$\vec{B} = \mu_0 \left(\frac{\vec{B}}{\mu_r} + \vec{M}\right) \leadsto \vec{M} = \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu_r}\right) \vec{B}$$

$$c/ B_{1N} - B_{2N} = 0 \iff \left(\frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_0}\right) M_{1N} = \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_0} M_{2N}$$

$$H_{1T} - H_{2T} = 0 \iff \frac{M_{1T}}{\mu_1 - \mu_0} = \frac{M_{2T}}{\mu_2 - \mu_0}$$

$$d/ \vec{j}_{\text{libre}} = \vec{M}_1 \wedge \vec{n}_{12}, \vec{j}_{\text{libre}} = -\vec{M}_2 \wedge \vec{n}_{12}$$

$$\vec{j}_{\text{libre}} = \vec{j}_{\text{libre}} + \vec{j}_{\text{libre}} = (\vec{M}_1 - \vec{M}_2) \wedge \vec{n}_{12}$$



UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
TETOUAN

ANNEE : 2019-2020
SECTION : A et B de SMP-S4
MATIERE: Electricité3
Prof : A. Hajraoui

Travaux dirigés d'électricité3 (Série n°3)

I. On considère un milieu électromagnétique quelconque de constantes ε et μ . Celui-ci est caractérisé par les champs vectoriels \vec{E} , \vec{H} , \vec{A} et scalaire V .

a) Ecrire les équations de Maxwell dans ce milieu en forme locale ou différentielle et en forme intégrale ?

b) Rappeler les relations liant le potentiel scalaire et celui vectoriel aux champs électrique et magnétique ?

c) Si f est une fonction scalaire, montrer que les transformations ci-dessous laissent les champs \vec{E} et \vec{H} invariants ?

$$V \rightarrow V' = V'(V, f) \quad \text{et} \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A}'(\vec{A}, f)$$

II- On considère un milieu non vide, caractérisé par les constantes ε et μ . Les champs vectoriels \vec{E} et \vec{H} sont supposés orthogonaux en tout point de ce milieu. Celui-ci contient des charges mobiles. Ses densités des charges et celles des courants sont variables. Les paramètres a , b , E_0 et H_0 sont constants. On donne :

$$\vec{E} = (ay + E_0)e^{i(kz + \omega t)}\vec{e}_y, \quad \vec{H} = (by + H_0)e^{i(kz + \omega t)}\vec{e}_x \quad \text{et} \quad kH_0 - \omega E_0 = 1$$

a) Déterminer l'induction magnétique $\vec{B}(y, z, t)$ et vérifier que son flux à travers toute surface fermée est conservatif ?

b) Déterminer le déplacement électrique \vec{D} et la densité des charges libres $\rho_L(y, z, t)$?

c) Montrer que les amplitudes E_0 et H_0 vérifient la relation suivante :

$$\frac{E_0}{H_0} = \frac{\mu\omega}{k} = \frac{a}{b}$$

d) Déterminer la densité de courant libre \vec{J}_L dans le milieu indiqué, en fonction de b , H_0 , k , ω , z et t ?

e) Montrer que le flux du vecteur de Poynting ($\vec{\pi} = \vec{E} \wedge \vec{H}$) à travers toute surface fermée (ou la puissance rayonnée) est réactif ?

III. On considère Un Champ électromagnétique (\vec{E} , \vec{H}) dans un milieu non vide, caractérisé par les constantes ϵ , μ , ω et k . Ses densités de courant libre et de courant de déplacement sont égales. Les composantes du champ électrique \vec{E} sont telles que :

$$\vec{E} = [E_o \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kz)] \vec{e}_x$$

- a)** Calculer les composantes de l'induction magnétique \vec{B} associé lorsque son module vaut $\frac{\pi E_o}{a\omega} \sqrt{2}$?
- b)** Calculer la densité du courant libre \vec{J}_L ?
- c)** Etablir les composantes de vecteur déplacement \vec{D} ?

**Sites.google.com/site/saborpcmath/
cours en ligne
par whatsapp: 0638148874**

2019/2020
CORRECTION DE LA SERIE N°3

(I) a/ (a) Equations de Maxwell en forme locale

$$\text{div } \vec{D} = \rho_L, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{J}_L + \vec{J}_D = \vec{J}_L + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

(a) Equations de Maxwell en forme integrale:

$$\oint_{S_{\text{fermee}}} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_L, \quad \int_{C_{\text{fermee}}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{s} \right]$$

$$\oint_{S_{\text{fermee}}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0, \quad \int_{C_{\text{fermee}}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_L + \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{S(C)} \vec{D} \cdot d\vec{s} \right]$$

$$b/ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \leadsto \vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \leadsto \vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}$$

c/ Si on transforme les potentiels:

V en $V' = V - \frac{\partial f}{\partial t}$ et \vec{A} en $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } f$
avec f une fonction scalaire, on aura:

$$(c_1) \vec{E}' = -\text{grad } V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = (-\text{grad } V + \frac{\partial \text{grad } f}{\partial t}) - \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial (\text{grad } f)}{\partial t} \right)$$

$$= -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \leadsto \vec{E}' \text{ est invariable.}$$

$$(c_2) \vec{B}' = \text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A} + \text{rot}(\text{grad } f) = \text{rot } \vec{A} = \vec{B}$$

$$\vec{B}' = \mu \vec{H}' = \vec{B} = \mu \vec{H} \leadsto \vec{H} \text{ est invariable.}$$

(II) a/ $\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu H_x \vec{e}_x = B_x \vec{e}_x$ (données) \Rightarrow

$$\vec{B}_x = [\mu(B_y + H_0) e^{i(Kz + \omega t)}] \vec{e}_x = \vec{B}$$

$$\text{div } \vec{B} =$$

$$= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \leadsto \text{div } \vec{B} = 0 \leadsto \vec{B} \text{ est conservatif.}$$

$$b/ \vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon E_y \vec{e}_y = D_y \vec{e}_y = [\epsilon (ay + E_0) e^{i(kz + \omega t)}] \vec{e}_y$$

$$\rho_L = \text{div} \vec{D} = \frac{\partial D_y}{\partial y} = a \epsilon e^{i(kz + \omega t)}$$

$$c/ \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ avec } -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nu \frac{\partial H_x}{\partial t} \vec{e}_x = -i\omega \nu H_x \vec{e}_x$$

$$\text{et } \text{rot} \vec{E} = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & E_y & 0 \end{bmatrix} = -(\partial_z E_y) \vec{e}_x + (\partial_x E_y) \vec{e}_z = (\partial_z E_y) \vec{e}_x$$

$$\text{Donc } -i\omega \nu H_x = -\partial_z E_y = -ik E_y$$

$$k(ay + E_0) = \nu \omega (by + H_0) \Rightarrow ka = \nu \omega b \text{ et } kE_0 = \nu \omega H_0$$

$$\text{Par conséquent : } \frac{E_0}{H_0} = \frac{\nu \omega}{k} = \frac{a}{b}$$

$$d/ \text{rot} \vec{H} = \vec{j}_L + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \vec{j}_L = \text{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} ; \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} = i\omega \epsilon E_y \vec{e}_y$$

$$\text{rot} \vec{H} = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ H_x & 0 & 0 \end{bmatrix} = \partial_z H_x \vec{e}_y - \partial_y H_x \vec{e}_z$$

Alors

$$\vec{j}_L = (\partial_z H_x - i\epsilon \omega E_y) \vec{e}_y - \partial_y H_x \vec{e}_z$$

$$\vec{j}_L = \left\{ [ik(by + H_0) - i\epsilon \omega (ay + E_0)] \vec{e}_y - b \vec{e}_z \right\} e^{i(kz + \omega t)}$$

$$\vec{j}_L = \left[i \left(k - \frac{\nu \epsilon \omega^2}{k} \right) (by + H_0) \vec{e}_y - b \vec{e}_z \right] e^{i(kz + \omega t)}$$

$$e/ \iint_{\text{fermé}} (\vec{E} \wedge \vec{H}) d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \vec{\pi} d\vec{s} = \vec{P}_\pi ; \text{ Puissance moyenne électromagnétique, soit}$$

$$\vec{P} = \vec{\pi} \cdot \vec{s} \text{ avec } \vec{\pi} = E_y \vec{e}_y \wedge H_x \vec{e}_x = E_y H_x \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = -E_y H_x \vec{e}_z$$

$$\text{et } \vec{s} = s \vec{e}_z \Rightarrow \vec{P}_\pi = -E_y H_x \text{ car } \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$$

$$\vec{P}_\pi = -(ay + E_0)(by + H_0) [\cos 2(kz + \omega t) + i \sin 2(kz + \omega t)]$$

$$= \vec{P}_{\text{active}} + i \vec{P}_{\text{réactive}} \Rightarrow \vec{P}_{\text{réactive}} = -(ay + E_0)(by + H_0) \sin 2(kz + \omega t)$$

Le flux de $\vec{\pi}$ est en effet réactif, en plus.

III a/ on sait que $\vec{E} = [E_0 \sin \frac{\pi y}{a} \sin(\omega t - kz)] \vec{e}_x$ et

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \begin{matrix} \leftarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial_z B_x \\ -\partial_z B_y \\ -\partial_z B_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \partial_z E_x \\ -\partial_y E_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial_z B_x \\ -\partial_z B_y \\ -\partial_z B_z \end{bmatrix}$$

D'où

$$\partial_z B_x = 0 \Rightarrow B_x = C_0 : \text{constante.}$$

$$\partial_z B_y = k E_0 \sin \frac{\pi y}{a} \cos(\omega t - kz) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{avec } \|\vec{B}\| = \frac{\pi E_0}{k\omega} \vec{a} \\ t=0, y=0 \text{ et } z=0 \Rightarrow C_0 = ? \text{ et} \end{array} \right.$$

$$\partial_z B_z = \frac{\pi E_0}{a} \cos \frac{\pi y}{a} \sin(\omega t - kz)$$

$$\left\langle \vec{B} = \frac{\pi E_0}{k\omega} \vec{e}_x + \left[k E_0 \sin \frac{\pi y}{a} \cos(\omega t - kz) \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\pi E_0}{a} \cos \frac{\pi y}{a} \sin(\omega t - kz) \right] \vec{e}_z \right\rangle$$

b/ D'après les équations de Maxwell: $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_L + \vec{j}_D = \vec{j}_L = \vec{j}_D$

$$\text{Ainsi: } \vec{j}_L = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{j}_L = \frac{1}{\mu_0} [(\partial_y B_z - \partial_z B_y) \vec{e}_x + 0 \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z], \quad \partial_y B_z = -\frac{\pi^2 E_0}{a^2 \omega} \sin \frac{\pi y}{a} \cos(\omega t - kz)$$

$$\text{et } \partial_z B_y = -\frac{k^2 E_0}{\omega} \sin \frac{\pi y}{a} \cos(\omega t - kz)$$

$$\Rightarrow \vec{j}_L = \frac{E_0}{\mu_0} \left[\frac{\pi^2}{a^2 \omega} \sin \frac{\pi y}{a} \cos(\omega t - kz) - \frac{k^2}{\omega} \sin \frac{\pi y}{a} \cos(\omega t - kz) \right] \vec{e}_x$$

c/ On sait que: $\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = (\partial_t D_x) \vec{e}_x + (\partial_t D_y) \vec{e}_y + (\partial_t D_z) \vec{e}_z$

$$\Rightarrow \partial_t D_z = 0, \partial_t D_y = 0 \Rightarrow D_y = C_1 \text{ et } D_z = C_2 : \text{constantes}$$

$$\partial_t D_x = j_{D_x} \Rightarrow \vec{j}_D = \frac{E_0}{\mu_0 \omega} \left[\frac{\pi^2}{a^2 \omega} \cos \frac{\pi y}{a} \sin(\omega t - kz) - \frac{k^2}{\omega} \sin \frac{\pi y}{a} \sin(\omega t - kz) \right] \vec{e}_x$$

$$\text{si } \vec{D}(y=0, z=0, t=0) = 0 \Rightarrow \langle \vec{D} = D_x \vec{e}_x \rangle \text{ ou}$$

$$\vec{D} = \frac{E_0}{\mu_0 \omega} \left[\frac{\pi^2}{a^2 \omega} \cos \frac{\pi y}{a} \sin(\omega t - kz) - \frac{k^2}{\omega} \sin \frac{\pi y}{a} \sin(\omega t - kz) \right] \vec{e}_x$$

Travaux dirigés d'électricité3 (Série n°4)

I-Un milieu est caractérisé par sa permittivité électrique ϵ et sa perméabilité magnétique μ . Son potentiel scalaire V , son potentiel vecteur \vec{A} , sa densité volumique des charges libres ρ et sa densité volumique de courant libre \vec{J} sont dépendants de temps. Ils sont exprimés ci-dessous. On suppose que toutes les conditions initiales sont nulles.

$$\rho(x, t) = \rho_o \cos \frac{t}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad , \quad V(x, t) = V_o(x) \cos \frac{t}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad , \quad \vec{J}_o = J_o(1,1,1)^T$$
$$\vec{J}(t) = \vec{J}_o \sin \frac{t}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad , \quad \vec{A}(x, y, z, t) = \vec{A}_o(x, y, z) \sin \frac{t}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \text{et}$$
$$\vec{A}_o(x, y, z) = (a_1(x), a_2(y), a_3(z))^T$$

- a)** Ecrire les équations différentielles vérifiées par ces potentiels ?
- b)** Calculer les grandeurs $V_o(x)$ et $\vec{A}_o(x, y, z)$?
- c)** Etablir le module de $\vec{A}(x, y, z, t)$?

II- On considère un milieu non vide, limité par la surface fermée S . Ses paramètres sont ϵ , μ et v . Ce milieu a toutes ses densités uniformes. L'équation de propagation dans ce milieu, vérifiée par le champ électrique \vec{E} est de la forme ci-dessous.

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad \text{Avec} \quad \vec{E} = \vec{E}(t - \frac{z}{v})$$

- a)** Etablir la solution explicite de l'équation différentielle ci-dessus ? On donne :

$$E_x(0, t) = E_{ox} \cos(\omega t + \varphi_o) \quad \text{et} \quad E_y(0, t) = E_{oy} \cos(\omega t)$$

- b)** Déterminer l'expression de $\vec{H} = \vec{H}(t - \frac{z}{v})$?
- c)** Calculer le vecteur de poynting $\vec{\pi}$ correspondant à ces champs ?
- d)** A quelles conditions le champ \vec{H} est de polarisation circulaire?

CORRECTION DE LA SERIE N°4

① a/ Equations différentielles vérifiées par les potentiels V et \vec{A} :

$$\begin{cases} -\Delta V(x, y, z, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\rho_L}{\epsilon_0} \\ -\Delta \vec{A}(x, y, z, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{J}_L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\Delta V(x, y, z, t) - V(x, y, z, t) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cos \frac{t}{\sqrt{\mu\epsilon}} \\ -\Delta \vec{A}(x, y, z, t) - \vec{A}(x, y, z, t) = \mu_0 \vec{J}_0 \sin \frac{t}{\sqrt{\mu\epsilon}} \end{cases}$$

b/ Calcul de V_0 et \vec{A}_0 : D'après les équations établies en (a), on peut écrire:

$$\begin{cases} \frac{d^2 V_0(x)}{dx^2} + V_0(x) = -\frac{\rho_0}{\epsilon} \\ \Delta a_1(x) + a_1(x) = -\mu J_0 \\ \Delta a_2(y) + a_2(y) = -\mu J_0 \\ \Delta a_3(z) + a_3(z) = -\mu J_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 V_0(x)}{dx^2} + V_0(x) = -\frac{\rho_0}{\epsilon} \\ \frac{d^2 a_1(x)}{dx^2} + a_1(x) = -\mu J_0 \\ \frac{d^2 a_2(y)}{dy^2} + a_2(y) = -\mu J_0 \\ \frac{d^2 a_3(z)}{dz^2} + a_3(z) = -\mu J_0 \end{cases} \begin{matrix} 4 \text{ équations} \\ \text{différentielles} \\ \text{de second ordre} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} V_0(x) &= -\frac{\rho_0}{\epsilon} + \lambda \cos(x + \varphi) \\ a_1(x) &= -\mu J_0 + A_x \cos(x + \varphi_x) \\ a_2(y) &= -\mu J_0 + A_y \cos(y + \varphi_y) \\ a_3(z) &= -\mu J_0 + A_z \cos(z + \varphi_z) \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{Or toutes} \\ \text{les condi-} \\ \text{tions ini-} \\ \text{ciales sont} \\ \text{nulles.} \end{array} \right\} \begin{cases} V_0(0) = -\frac{\rho_0}{\epsilon}, \cos \varphi = 0 \text{ et } \lambda' = 0 \\ a_1(0) = -\mu J_0 + A_x \cos \varphi_x = 0 \text{ et } a_1'(0) = 0 \\ a_2(0) = -\mu J_0 + A_y \cos \varphi_y = 0 \text{ et } a_2'(0) = 0 \\ a_3(0) = -\mu J_0 + A_z \cos \varphi_z = 0 \text{ et } a_3'(0) = 0 \end{cases}$$

Cela entraîne que $\varphi = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$, D'où:

$$\begin{cases} V_0(x) = \frac{\rho_0}{\epsilon} (-1 + \cos x) \\ a_1(x) = \mu J_0 (-1 + \cos x) \\ a_2(y) = \mu J_0 (-1 + \cos y) \\ a_3(z) = \mu J_0 (-1 + \cos z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V(x, y, z, t) = \frac{\rho_0}{\epsilon} (-1 + \cos x) \cos \frac{t}{\sqrt{\mu\epsilon}} \\ \vec{A}(x, y, z, t) = \mu J_0 \begin{bmatrix} -1 + \cos x \\ -1 + \cos y \\ -1 + \cos z \end{bmatrix} \sin \frac{t}{\sqrt{\mu\epsilon}} \end{cases}$$

c/ Module de \vec{A} :

$$\begin{aligned} \|\vec{A}\|^2 &= A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = \left(VE \sin \frac{t}{\sqrt{VE}}\right)^2 \left[3 + \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 2(\cos x + \cos y + \cos z)\right] \\ &= A \\ \Rightarrow A &= \left(VE \sin \frac{t}{\sqrt{VE}}\right) \left[3 + \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 2(\cos x + \cos y + \cos z)\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

II a/ Du fait que les densités du milieu considéré sont uniformes, on a comme indiqué: $\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$ car ($k^2 = N^2 \omega^2$). Le champ \vec{E} en propagation suivant $z'z$, dans le milieu (ϵ, μ, v) n'a que deux composantes. On note donc

$$\begin{cases} \Delta E_x(z, t) + k^2 E_x(z, t) = 0 \\ \Delta E_y(z, t) + k^2 E_y(z, t) = 0 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} \frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2 E_x = 0 \\ \frac{d^2 E_y}{dz^2} + k^2 E_y = 0 \end{cases} \text{ car}$$

$$E_x(t - \frac{z}{v}) = E_x(z, t) \quad \text{et} \quad \frac{d^2 E_x}{dz^2} = \frac{d^2 E_x}{dt^2} = 0$$

Les deux équations différentielles indiquées ont les solutions suivantes:

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= E_{0x} \cos(kz - \omega t - \varphi_0) \xrightarrow{\omega = kv} E_{0x} \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \varphi_0\right] = E_x\left(t - \frac{z}{v}\right) \\ E_y(z, t) &= E_{0y} \cos(kz - \omega t) \xrightarrow{\omega = kv} E_{0y} \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right] = E_y\left(t - \frac{z}{v}\right) \end{aligned}$$

b/ $\vec{H}\left(t - \frac{z}{v}\right) = ?$ On sait que: $\vec{E}\left(t - \frac{z}{v}\right) = E_x\left(t - \frac{z}{v}\right) \vec{e}_x + E_y\left(t - \frac{z}{v}\right) \vec{e}_y$ et

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\partial_z E_y \\ \partial_z E_x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec $\partial_{x_i} = \partial / \partial x_i$

Donc:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} -\frac{\omega}{\mu v} E_{0y} \sin \omega\left(t - \frac{z}{v}\right) &= \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\omega}{\mu v} E_{0x} \sin \omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \varphi_0 &= \frac{\partial H_y}{\partial t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} H_x\left(t - \frac{z}{v}\right) = H_{0x} \cos \omega\left(t - \frac{z}{v}\right) \\ H_y\left(t - \frac{z}{v}\right) = H_{0y} \cos \omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \varphi_0 \end{cases} \\ \text{avec } H_{0x} = E_{0y} / \mu v \quad \text{et} \quad H_{0y} = -E_{0x} / \mu v \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{H}(t-\frac{z}{v}) = H_x(t-\frac{z}{v})\vec{e}_x + H_y(t-\frac{z}{v})\vec{e}_y$$

c/ d'après le cours, le vecteur de pointing $\vec{\Pi}$ est défini par : $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{H}$. Il caractérise tout onde électromagnétique.

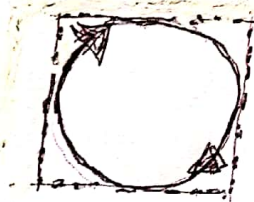
Alors
$$\begin{bmatrix} \Pi_x \\ \Pi_y \\ \Pi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ E_x & E_y & 0 \\ H_x & H_y & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Pi_x = 0 \\ \Pi_y = 0 \\ \Pi_z = E_x H_y - E_y H_x \end{cases} \Rightarrow$$

$$E_x H_y = E_{0x} H_{0y} \cos^2 \left[\omega(t-\frac{z}{v}) + \varphi_0 \right] \text{ et } E_y H_x = E_{0y} H_{0x} \cos^2 \left[\omega(t-\frac{z}{v}) \right]$$

Donc :
$$\vec{\Pi}(t-\frac{z}{v}) = -\frac{1}{\mu v} \left\{ E_{0y}^2 \cos^2(t-\frac{z}{v}) + E_{0x}^2 \cos^2 \left[\omega(t-\frac{z}{v}) + \varphi_0 \right] \right\} \vec{e}_z$$

d/ Polarisation du champ \vec{H} et la valeur de déphasage φ_0 :

⊗ Si $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ et $H_{0x} = H_{0y} = H_0$; \vec{H} est de polarisation circulaire droite.



⊗ Si $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ et $H_{0x} = H_{0y} = H_0$; \vec{H} est de polarisation circulaire gauche

